Integration af logarithmiske Differentialer af den Form $e^z dx$, hvor z er en Function af x

ved

Johan Nicolai Tetens.

§. 1.

Naar man anvender Analysis paa virkelige Objekter i Naturen, og seer deres Forandringer at underkastes Calculen, da kommer man meget ofte til logarithmiske Differentialer. Af egen Erfaring har Lambert giort den Bemærkning (a), at næsten alle Tilfælde af dette Slags lede til transcendente Æqvationer. Han har ladet det være uafgiort, om dette skeer enten formedelst Sagens Natur, eller formedelst en Mangel i vor Analysis; dog tilskrev han den sidste Aarsag det meste. Jeg maae tilstaae, at jeg ikke ganske bifalder denne skarpsindige Mands Mening; at vi saa ofte (dog ei altid) komme til transcendente Æqvationer. I saadanne Tilfælde, som de ere, hvilke Lambert, for det meste, selv har undersøgt, synes mig, at det ligger i Sagens egen Natur; men det er en Mangel i Analysis, og besynderlig i Integralregningen, at vi da ikke ret kunne komme fort, og opdage de søgte Forandringers Love, fordi dette kommer

(a) See Lamberts Briefwechsel B. S. 200.

kommer af Integrationen. Saa ofte Forandring i Størrelsen (dy) forholder sig som Størrelsen (y) selv, og desuden end videre dependerer af en anden foranderlig Størrelse (x), saaledes som en Function af samme (z) tilkiendegiver; saa ofte kommer man og til en Æqvation af saadan en Form $y = e^z$, og da bliver det i de allerfleste Tilfælde en Fornødenhed at finde Integralet $Se^z dx$. Lovene for Menneskenes Dødelighed kan regnes herhen, efterdi de Dødes Antal er proportionalt med de Levendes, naar Alderen er den samme; og desuden paa en vis Maade kommer an paa Alderen selv. Mine Undersøgelser angaaende disse Love have lært mig, hvor vigtig Integrations-Methoden af saadanne Differentialier kan blive for det Praktiske. Det er bekiendt nok, at Analysis herudi endnu er temmelig indskrænket; jeg har derfor anseet det for ikke ubetydeligt, at man desangaaende søgde, at udfinde almindelige Methoder.

§. 2.

Jeg vil først tage de Integraler $Se^z dx$, hvor z er en algebraisk Function af x.

Lad derfor y være $= e^z$, hvor e tilkiendegiver det Tal, hvis Logarithmus $= 1$, som sædvanligt, saa er $dy = e^z dz = ydz$.

Fremdeles tag $dz = Xdx$, hvor igien X er en Function af x, saaledes at den tillige er en rational og endelig Function af x. Denne Methode udstrækker sig videre, saaledes som i det Følgende skal blive klart, og man kan begynde ved de lettere og simplere Exempler.

Antag $X = a + 2bx$, altsaa $Xdx = adx + 2bxdx$; og $z = ax + bx^2$.

§. 3.

Man antage, at $Se^z dx$, eller $Sydx = y . V$, hvor V ligeledes maae være en Function af x.

altsaa $ydx = ydV + Vdy = ydV + Vy . dz$

(§. 2.) $= y . dV + yVXdx$

altsaa $dx = VX + dV : dx$

eller $1 - VX - dV : dx = 0$.

Denne sidste Æqvation kan her kaldes Hoved-Æqvationen; den er en Æqvation, som tilkiendegiver Betingelserne ved Integrationen, og kunde for saa vidt kaldes Betingelsernes Æqvation (æqvation de condition); men dette sidste Kunstord har allerede en anden bestemt Bemærkelse i Integralregningen.

§. 4.

Man kan endnu paa en almindeligere Maade antage, at $K . Sydx = y . V^n$, hvor K er en bestandig Størrelse, i hvis Sted 1 altid kan sættes. Man finder da $K - V^n X - d(V^n) dx = 0$ til Hoved-Æqvation. Men da dog derved Methoden ved Slutningen ikke bliver almindeligere, end den allerede er, saa beholder man den forrige Hoved-Æqvation $1 - VX - dV : dx = 0$.

5.

Lad fremdeles være $V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + +$, hvor A, B, C, D ere bestandige Coefficienter, da der herefter skal afhandles de Tilfælde, hvor de ere foranderlige Størrelser, saa bliver

$$\frac{dV}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \text{ o. s. f.}$$

Er nu $X = a + 2bx$, som i nærværende Tilfælde §. 2, saa har man

$$\begin{aligned} VX &= aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 \text{ o. s. f.} \\ &\quad + 2bAx + 2bBx^2 + 2bCx^3 \text{ o. s. f.} \end{aligned}$$

følgelig
$$\begin{aligned} 0 = 1 &- Aa - aBx - aCx^2 - aDx^3 \\ &- B - 2bAx - 2bBx^2 - 2bCx^3 \\ &\quad - 2Cx - 3Dx^2 - 4Ex^3 \text{ o. s. f.} \end{aligned}$$

Heraf bestemmes Coefficienterne A, B, C o. s. v. i Raden V. Saa er $1 - Aa - B = 0$. Nu er det vilkaarligt, enten man sætter A eller $B = 0$ eller og ingen af begge; men dog saaledes, at een af dem vilkaarlig bestemmes. Man tager $A = 0$, saa er $B = 1$.

Fremdeles $aB + 2C = 0$; altsaa $C = -\frac{aB}{2}$

$aC + 2bB + 3D = 0$ . . . $D = -\frac{1}{3} . (aC + 2bB)$

fremdeles $E = -\frac{1}{4} . (aD + 2bC)$

og

og saa fremdeles, hvoraf Loven for Fremgangen er klar. Følgelig bliver det søgte Integral $Sydx = Se^{ax + bx^2} . dx = yV = e^{ax + bx^2} . (Bx - \frac{1}{2} . aBx^2 - \frac{1}{3} . (aC + 2bB) x^3 - -)$.

§. 6.

Man seer af dette Exempel, hvor simpel, og tillige hvor almindelig denne Methode er, naar man ved Opløsninger i uendelige Rader integrerer Æqvationer af den Form $C - VX - dV : dx$, naar X er en Function af x. Newtons Methode forholder sig til denne Methode, omtrent som Brugen af Regula falsi til de algebraiske Methoder ved Æqvationer. Naar denne store Mand skriver om sin Methode: Sic demum ad finem perduxi hoc valde intricatum, et omnium aliorum difficillimum problema, qvando duæ solum sunt fluentes qvantitates, una cum fluxionibus suis in proposita æqvatione; saa er dette et Beviis, at det, som saa ofte hændes de Svagere, og er skeet med ham, at man undertiden langt borte og ved Omveie søger det, hvilket ligefrem og i Nærheden havde været at finde. Efter forbeskrevne Maade kan man giøre Prøve med alle de Exempler, hvilke Newton har, og man vil meget let for Integralerne finde de samme Rader, som forekomme hos ham (b).

§. 7.

Denne Methode giver Integralet ikkun ved Rader, hvilke, naar de ikke høre op, eller ikke convergere, ere ubrugelige. Paa denne Indvending kan jeg svare, at Newtons Methode heller ikke gaaer længere: at man i dette og lige Tilfælde dermed maae være fornøiet; efterdi ingen Adskillelse finder Sted, og hvor det ikke skeer, kan for nærværende Tid Integralet ikke gives anderledes end ved Rader; meget sieldne Tilfælde undtagne. Korthed og Lethed bliver immer et Fortrin ved den her forklarte Methode. Man er desuden ikke bunden alene til stigende Rader for V; man kan og vælge faldende Rader, i hvilke Potentserne af x tage af, og blive negative, og som negative

(b) Newtons Methode er med fortrinlig Tydelighed forklaret i Elemens du Calcul Integral par les P. P. le Seur et Jacquier. P. II. Cap. 2.

vore, og hvor enten den ene eller anden Slags convergerer, undertiden hører op og giver Integralet i en endelig Størrelse. Hertil ledes man ikke altid, eller i det mindste ikke saa ligefrem ved Newtons Methode.

Den foregaaende Hoved-Æqvation $1 - V(a + 2bx) - dV : dx = 0$ §. 3. giver efter Newtons Methode ikkun en stigende Rad for V; men efter foregaaende Methode kan man og tage en faldende Rad.
Man sætte nemlig:

$$V = Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4} \text{ o. s. f.}$$

$$\begin{aligned} \text{saa er } (a + 2bx)V &= 2Ab + 2bBx^{-1} + 2bCx^{-2} + 2bDx^{-3} + + \\ &\qquad + aAx^{-1} + aBx^{-2} + aCx^{-3} + + \\ \text{og } \frac{dV}{dx} &= \qquad\qquad - Ax^{-2} - 2Bx^{-3} - - \\ \text{Altsaa } 0 &= 1 \quad - 2bBx^{-1} - 2bCx^{-2} - 2bDx^{-3} - - \\ &\quad - 2bA - aAx^{-1} - aBx^{-2} - aCx^{-3} - - \\ &\qquad + Ax^{-2} + 2Bx^{-3} + + \end{aligned}$$

følgelig for Coefficienterne i Raden V

$$1 - 2bA = 0; \quad A = \frac{1}{2b}$$

$$2bB + aA = 0; \quad B = -\frac{aA}{2b}$$

$$2bC + aB - A = 0; \quad C = \frac{A - aB}{2b}$$

$$2bD + aC = 2B; \quad D = \frac{2B - aC}{2b}$$

hvoraf Fremgangsloven for de følgende er klar.

Dernæst bliver $V = \frac{1}{2b} \cdot x^{-1} - \frac{1}{2b} \cdot aAx^{-2} - \frac{1}{2b}(aB - A) \cdot x^{-3} - \frac{1}{2b}(aC - 2B)\,x^{-4}$, o. s. f. Og Raden af Coefficienterne er selv convergerende, naar $a < 2b$.

§. 8.

Denne samme Art af Opløsning for Hovedraden har veiledet mig til en Methode, til i Analysis at finde stigende Rader isteden for faldende, hvilke høre til de samme Æqvationer, og kunne bruges isteden for de vorende Rader,

og

Fig. 1.

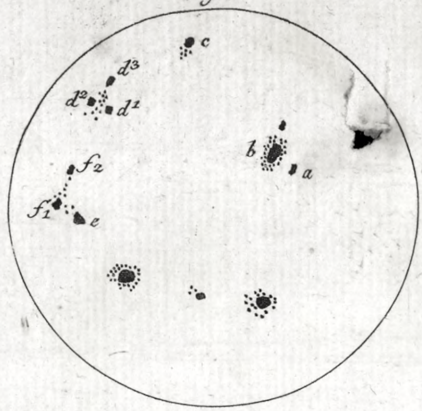


Fig. 2.

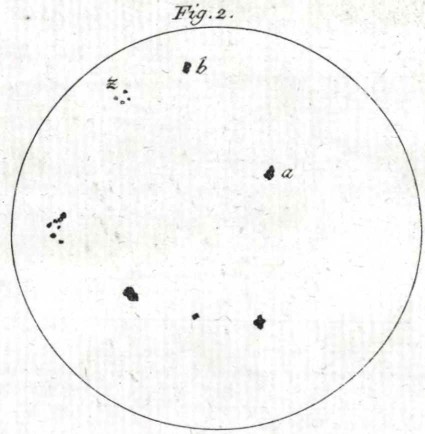
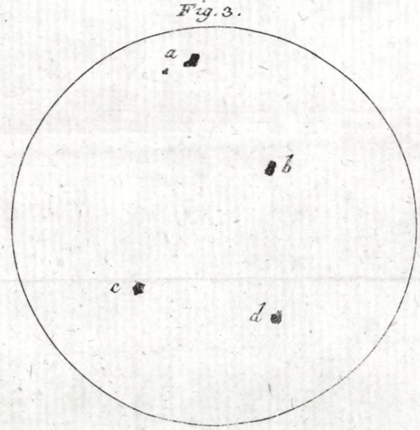


Fig. 3.



og som ofteſt convergere, hvor de andre divergere. Jeg ſiger som ofteſt, da der gives Undtagelser; efterdi begge kunne være af den Art, at de ikkun til en vis Grændse have den ene Egenskab, og derfra fremdeles erholde den anden Egenskab. Derom ſkal jeg udførligere handle en anden Gang. Denne Materie er vigtig i Integralregningen.

§. 9.

Endnu en Anmærkning angaaende Beſtemmelsen af Coefficienterne i Raden V. Man fandt (§. 5.) for de tvende første Coefficienter A og B

$$1 - Aa - B = 0$$

og da disse ere ubeſtemte, saa tilkiendegiver det, at der maae være flere Rader, som kunde bruges. Man kunde saaledes, som der er ſkeet, antage $A = 0$, saa var $B = 1$. Naar man tog $B = 0$, saa blev $A = \frac{1}{a}$, og $2bA + 2C = 0$, og $A = -\frac{C}{b}$. o. s. f. Ligeledes kunde man, uden at antage A eller $B = 0$, beſtemme enhver af dem vilkaarlig. Herved kan det ſkee, at Raden for V afbrydes enten paa den ene eller anden Maade. Naar i foregaaende Exempel $b = 0$, det er naar $X = a$ eller $z = ax$, og altsaa det søgte Integral $Se^{ax} . dx = \frac{1}{a} . e^{ax}$, saa faaer man

$$\begin{aligned} 0 = 1 &- Aa - aBx - aCx^2 - aDx^3 - - \\ &- B - 2Cx - 3Dx^2 - 4Ex^3 - - \end{aligned}$$

Naar altsaa i Æqvationen for de tvende første Coefficienter $1 - aA - B = 0$, ligeledes $B = 0$, saa er $A = \frac{1}{a}$, og de efter B følgende Coefficienter i Raden V forsvinde. Man finder da $V = \frac{1}{a}$ og $Se^{ax} . dx = e^{ax} . \frac{1}{a}$

Naar i dette Tilfælde $A = 0$, saa er $B = 1$, og da faaer man $C = -\frac{a}{2}$; $D = -\frac{aC}{3}$; $E = -\frac{aD}{4}$, og $V = x - \frac{ax^2}{1.2} + \frac{a^2x^3}{1.2.3} - \frac{a^3x^4}{1.2.3.4} + -$; $aV = ax - \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} - \frac{a^4x^4}{1.2.3.4} + -$; $1 - aV = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \frac{a^4x^4}{1.2.3.4}$

$$\frac{1 - aV = e^{-ax} \text{ og}}{\frac{1 - e^{-ax}}{a} = V}$$

følgelig $Se^{ax}\,dx = e^{ax} \cdot \frac{1 - e^{ax}}{a} = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} - \frac{1}{a}$.

Dette er det fuldstændige Integral $Se^{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$, hvor nemlig C er den til Udfyldningen fornødne bestandige Størrelse. Den er $= -\frac{1}{a}$, naar $x = 0$ Integralet er $\frac{1}{a}\,e^{ax} = \frac{1}{a}$.

Sammenligner man den sidste Sætning $V = \frac{1 - e^{-ax}}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a \cdot e^{ax}}$ med det forhen fundne $V = \frac{1}{a}$, saa viser sig for meget. Af Hovedæqvationen $1 - XV - dV : dx = 0$ lade sig finde flere Værdier for V, hvilke man ikke tør antage for fuldkommen at være de samme, og i ethvert Tilfælde lige; saaledes at, naar de betegnes med V og V^{I}, dog $Sydx = yV$, og tillige $Sydx = V^{I}$. Dog med den Forskiel, at et af disse Udtryk yV og yV^{I} giver Integralet $Sydx$ fuldstændig tilligemed sin Constante, men det andet ikke. Egentlig er $Sydx = yV + K$, og ligeledes $Sydx = yV^{I} + K^{I}$, naar K og K^{I} er Udfyldningen til Integralet; da kan den ene være o, naar den anden ikke er det.

§. 10.

Endnu et bekiendt Exempel, for at sætte Methoden i sit fulde Lys. Lad det søgte Integral $Se^{z}\,dx = S \cdot e^{mx + n \,\text{Log.}\, x} \cdot dx$, dette er liig med $Se^{mx} \cdot x^{n} \cdot dx$, efterdi $x^{n} = e^{n \,\text{Log.}\, x}$.

Da er $mdx + nx^{-1} \cdot dx = dz$
og $X = dz : dx = m + nx^{-1}$.

Efterdi nu $1 - XV - dV : dx = 0$, saa antager man allerførst for V en stigende Rad, og sætter

V =

$$V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + +$$

saa bliver $\frac{dV}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + +$

og $XV = mA + mBx + mCx^2 + mDx^3 + +$
$+ nAx^{-1} + nB + nCx + nDx^2 + nEx^3 + +$

Altsaa $0 = 1 - nAx^{-1} - nB - mBx - mCx^2 - mDx^3 - -$
$- B - nCx - nDx^2 - nEx^3 - -$
$- 2Cx - 3Dx^2 - 4Ex^4 - -$

Deraf faaer man $nA = 0$; altsaa $A = 0$

fremdeles $1 - nB - B = 0,\ B = \frac{1}{n+1}$

$- mB - nC - 2C = 0,\ C = -\frac{mB}{n+2}$

ligeledes $D = -\frac{mC}{n+3}$; $E = -\frac{mD}{n+4}$ o. s. f.

Deraf erholder man

$$V = \frac{1}{n+1} \cdot x - \frac{m}{n+1 \cdot n+2} \cdot x^2 + \frac{m^2}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3} \cdot x^3 - +$$

denne Rad bryder ikke af.

§. 11.

Naar man for V tager en faldende Rad, saa er, naar

$$V = A + Bx^{-1} + Cx^{-2} + Dx^{-3} + Ex^{-4} + +$$

$dV : dx = - Bx^{-2} - 2Cx^{-3} - 3Dx^{-4} - -$ og

$VX = mA + mBx^{-1} + mCx^{-2} + mDx^{-3} + +$
$+ nAx^{-1} + nBx^{-2} + nCx^{-3} + +$

altsaa $1 - VX - dV : dx = 0 =$
$1 - mA - mBx^{-1} - mCx^{-2} - mDx^{-3} -$
$- nAx^{-1} - nBx^{-2} - nCx^{-3} -$
$+ Bx^{-2} + 2Cx^{-3} + +$

dette giver $A = \frac{1}{m}$; $B = -\frac{nA}{m}$; $C = -\frac{n-1}{m} \cdot B$; $D = -\frac{n-2}{m} \cdot C$, o. s. f.

Dersom n er et heelt og positiv Tal, saa bliver en Coefficient $= 0$, og med den alle de øvrige. Denne Række bryder altsaa i dette Tilfælde af, og man erholder $V = \frac{1}{m} x^{-1} - \frac{n}{m^2} . x^{-2} + \frac{n . \overline{n-1}}{m^3} . x^{-3} - +$ altsaa $Se^{mx} . x^n . dx = e^{mx} . x^n . \left(\frac{1}{m} x^{-1} - \frac{n}{m^2} x^{-2} + \frac{n . \overline{n-1}}{m^3} x^{-3} - +\right)$, hvilket er det bekiendte Udtryk af dette Integral, naar n er et heelt og positiv Tal.

Dette saaledes fundne Integral udfordrer endnu en Udfyldning, nemlig det sidste Led af Raden V, hvilket ikke er $= 0$, er $\frac{n . \overline{n-1} . \overline{n-2} \ldots \overline{n-(n-1)}}{m^n} . x^{-n}$ dette multipliceret med $e^{mx} . x^n$ giver for $x = 0$ den bestandige Størrelse $\frac{n . \overline{n-1} . \overline{n-2} \ldots 1}{m^n}$, hvilken altsaa maae drages fra det almindelige Udtryk, for at giøre Integralet fuldstændigt.

§. 12.

Man finder altsaa for V tvende Rader, en stigende og en faldende, af hvilke den ene bryder af, naar n er et positiv og heelt Tal; men ikke den anden (§. 10.) og af hvilke den første ikke forsvinder, naar $x = 0$; men den anden bliver og $= 0$, naar $x = 0$. Som bekiendt er, finder det samme Sted ved begge binomial Formler, naar x er et heelt Tal. Saadanne Tilfælde fortiene nøie at undersøges; maaskee kunde det give Anledning til almindelige Methoder, ved hvilke man isteden for de uendelige Rader kunde sætte andre Rader, hvilke under visse Betingelser afbryde, og saadanne ville være af megen Vigtighed i Analysis.

§. 13.

Naar i foregaaende Exempel n er negativ, eller $S . e^{mx} . x^{-n} . dx$ søges, saa afbryder paa ingensteds, hverken den faldende Rad (§. 11) eller den stigende (§. 10); men den sidste giver tillige Reductionen af det søgte Integral til Integralet $S . e^{mx} . x^{-1} . dx$ ligesom den sædvanlige Integration giør.

Lad til Exempel være $n = -4$ i den stigende Rad for V (§. 10) saa bliver

$$V = -\frac{x}{n-1} - \frac{mx^2}{n-1 \cdot n-2} - \frac{m^2x^3}{(n-1)(n-2)(n-3)} - -$$
$$= -\frac{x}{3} - \frac{mx^2}{3 \cdot 2} - \frac{m^2x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} - -$$

De efterfølgende Led blive $-\frac{m^3x^4}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}$; $-\frac{m^4x^5}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}$ o. s. v.

Disse ere Infinita, hvilke for sig ikke give noget bestemt Resultat; og altsaa for saavidt ere ubrugbare. Men da Raden, fra disse Led at regne, er den samme, som følgende $\frac{m^3x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1}\left(-\frac{x}{0} - \frac{mx^2}{0 \cdot (-1)} - -\right)$, og den i Parenthesen indsluttede Factor er Raden selv for V, naar man tager $n = -1$; saa følger, at, naar man isteden for V i dette sidste Tilfælde sætter V^1, bliver V for $n = -4$ deelt i tvende Dele; nemlig udi $-\frac{x}{3} - \frac{mx^2}{3 \cdot 2} - \frac{m^2x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$, og udi $-\frac{m^3x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot V^1$.

Altsaa er det søgte Integral $Se^{mx} \cdot x^{-4}dx = e^{mx} \cdot x^{-4}\left(-\frac{x}{3} - \frac{mx^2}{3 \cdot 2} - \frac{m^2x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1}\right) - \frac{m^3x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} e^{mx} \cdot x^{-4} \cdot V^1 = e^{mx}\left(-\frac{1}{3x^3} - \frac{m}{3 \cdot 2 \cdot x^2} - \frac{m^2}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x}\right) - \frac{m^3}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x} \cdot e^{mx} \cdot V^1$.

Da nu $e^{mx} \cdot x^{-1} \cdot V^1 = Se^{mx} x^{-1} dx$, saa er Integralet $Se^{mx} \cdot x^{-4} \cdot dx$ reduceret til $Se^{mx} \cdot x^{-1} \cdot dx$. Dette viser tillige Brugbarheden af den foregaaende Methode, efterdi den paa en let Maade fører til den sædvanlige Reduction.

Den faldende Rad for V §. 11. giver en Reduction for det foregaaende Integral, hvorved $Se^{mx} x^{-n} dx$ bringes til et andet Integral, i hvilket, isteden for den negative Exponent $(-n)$ findes en endnu større og ligeledes negativ Exponent; saa at endeligen $e^{mx} x^{-(n+x)}$ for et bestemt x bliver mindre end x^{-1}.

Naar n er negativ, saa er den faldende Rad for V i §. 11. $= \frac{1}{m} . x^{-1}$ $+ \frac{n}{m^2} . x^{-2} + \frac{n.(n+1)}{m^3} . x^{-3} + + + \frac{n.(n+1).(n+2)\ldots(n+r)}{m^{r+2}}$ $x^{-(r+2)}$. Det sidste Led tilligemed det følgende er $= \frac{n.(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{m^{r+1}}$ $. x^{-(r+1)} . \left(\frac{1}{m} x^{-1} + \frac{n+r+1}{m^2} x^{-2} + +\right)$, eller om Factoren i Parenthesen heder $V^1 = \frac{n+(n+1)\ldots(n+r)}{m^{r+1}} . x^{-(r+1)} . V^1$. og $\frac{n.(n+1)\ldots(n+r)}{m^{r+1}}$ $. e^{mx} . x^{-n} . x^{-r-1} . V^1$ er $= \frac{n.(n+1)\ldots(n+r)}{m^{r+1}} . Se^{mx} . x^{-(n+r+1)} . dx.$

§. 14.

Lad det søgte Integral være $Se^{ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3} . x^n dx$, eller $Se^{ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3 + n \,\text{Log}.\, x} . dx$, saa er $X = dz : dx = a + bx + cx^2$ $+ nx^{-1}$, eller opsatte efter Værdighederne af $x = nx^{-1} + ax^0 + bx + cx^2$.

Nu tages først for V en stigende Rad, eller $V = K + Ax + Bx^2$ $+ Cx^3 + Dx^4 + +$, saa erholder man

$$\begin{array}{rl} XV = & nKx^{-1} + nA + nBx + nCx^2 + nDx^3 + + \\ & + aK + aAx + aBx^2 + aCx^3 + + \\ & + bKx + bAx^2 + bBx^3 + + \\ & + cKx^2 + cAx^3 + + \\ dV : dx = & + A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + + \end{array}$$

Naar $1 - XV - dV : dx = 0$

og $nK = 0$, saa er $K = 0$

$1 - nA - A = 0; \; A = \frac{1}{n+1}$

$-(n+2)B - aA = 0; \; B = -\frac{aA}{n+2}$

$-(n+3)C - aB - bA = 0; \; C = -\frac{aB + bA}{n+3}$

$-(n+4)D - aC - bB - cA = 0; \; D = -\frac{aC + bB + cA}{n+4}$

og

og saa fremdeles, hvor Reglen for Fremgangen viser sig tydelig. Altsaa

$$V = \frac{1}{n+1}x - \frac{aA}{n+2}x^2 - \frac{aB + bA}{n+3}x^3 - \frac{(aC + bB + cA)}{n+4}x^4 - -$$

og $Se^{ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3} . x^n . dx = e^{ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3} . x^n . V.$

Antages for V en faldende Rad, nemlig $V = K + Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + Dx^{-4} + +$, saa faaer man, fordi $X = nx^{-1} + a + bx + cx^2$.

$$\begin{aligned} XV = {} & cKx^2 + cB + cCx^{-1} + cDx^{-2} + cEx^{-3} + cFx^{-4} + + \\ & + cAx + bA + bBx^{-1} + bCx^{-2} + bDx^{-3} + bEx^{-4} + + \\ & + bKx + aK + aAx^{-1} + aBx^{-2} + aCx^{-3} + aDx^{-4} + + \\ & + nKx^{-1} + nAx^{-2} + nBx^{-3} + nCx^{-4} + + \end{aligned}$$

og $dV : dx = \qquad - Ax^{-2} - 2Bx^{-3} - 3Cx^{-4} - -$

følgelig, naar $1 - VX - dV : dx = 0$

$$cK = 0;\ K = 0$$

$$cA = 0;\ A = 0$$

$$1 - cB = 0;\ B = \frac{1}{c}$$

$$cC + bB = 0;\ C = -\frac{Bb}{c}$$

$$cD + bC + aB = 0;\ D = -\frac{bC + aB}{c}$$

$$cE + bD + aC + (n-2)B = 0;\ E = -\frac{bD + aC + (n-2)B}{c}$$

$$cF + bE + aD + (n-3)C = 0;\ F = -\frac{bE + aD + (n-3)C}{c}$$

Derved har man Loven for den Fremgang, efter hvilken de følgende Coefficienter gjøres af de foregaaende. Deraf bestemmes Raden V, og Integralet gives.

Disse Exempler synes mig at være tilstrækkelige, saavel til at gjøre Methoden selv, som dens Anvendelse tydelig. I Coefficienterne af Raden V findes en vis Art af Recurrens, hvilken, omendskiønt den ikke egentlig gjør Raden til en recurrent Rad, saa dog i andre Henseender er mærkværdig. Jeg vil endnu kortelig vise, hvorvidt denne Methode strækker sig.

§. 15.

Man antage $X = dz : dx$ at være en rational Brøk i det søgte Integral $Se^z\,dx$, eller $Se^{Sxdx} . dx$.

Man sætter $X = P : M$, hvor begge P og M ere rationale Functioner af x, saa er i Følge Hovedæqvationen $1 - \frac{P}{M}V - dV : dx = 0$ eller ogsaa $M - PV - MdV : dx = 0$. Her kan man igien gaae frem paa den forrige Maade, og for V antage saavel en faldende, som en stigende Rad.

Til denne Art af Tilfælde henhøre alle Integraler af den Form $Se^R . Q . dx$, hvor R og Q ere rationale Functioner af x. Thi, efterdi $e^R . Qdx = e^{R + \text{Log.}\,Q} . dx = e^z dx$, saa bliver $X = dR : dx + dQ : Qdx$. Dette lader sig henbringe til en Fraction $P : M$.

Dersom Q er en rational Function af x, og ingen Brøk, eller af denne Form $a + bx + cx^2 + dx^3$ o. s. v., saa kan Integralet $Se^R\,Q . dx$ og tages stykkeviis, $aSe^R\,dx$, $b . Se^R\,xdx$, $cSe^R\,x^2dx$, som i §. 14. Man bruger til Coefficienterne for Raden V, isteden for n efterhaanden Exponenterne 1, 2, 3 o. s. v. Men som oftest vil man hastigere blive færdig, naar man paa eengang søger Raden V for det hele Integral.

§. 16.

Naar X selv er en uden Ende fortløbende Rad, saa maae man i Hovedæqvationen $1 - XV - dV : dx = 0$ isteden for V tage en Rad af selv samme Art, en stigende eller en faldende, saaledes som den i X er. Her er man altsaa meere indskrænket. Det kommer an paa, om man ikke isteden for Raden X kunde finde en anden, enten afbrydende, eller paa den modsatte Maade fortløbende Rad, hvilken kunde sættes isteden for hiin. Dette gaaer an i mange Tilfælde; men er egentligen ikkun nødvendigt, naar man ellers ikke har convergerende Rader.

§. 17.

Naar X er en irrational Function af x, saa kan undertiden det søgte Integral ved Substitution af andre foranderlige Størrelser henbringes til et saadant, i hvilket X eller dz : dx bliver rational. Dette er alletider det korteste. Hvor dette ikke gaaer an, kan altid X opløses i en faldende Rad af x, og da for V findes en faldende Rad. I ethvert Tilfælde kan man derved naae Maalet, at man først af Hovedæqvationen $1 - XV - dV : dx = 0$ bortbringer Irrationaliteten, og da først søger Raden for V.

Lad det søgte Integral være $Se^{(a+bx)^{\frac{1}{n}}}.dx$, saa er $X = \frac{b}{n}(a+bx)^{\frac{1}{n}-1}$, altsaa irrational, naar n er større end 1. Man sætte $(a+bx)^{\frac{1}{n}} = v$, saa bliver $bdx = nv^{n-1}.dv$, og $Se^{(a+bx)^{\frac{1}{n}}}.dx = \frac{n}{b}.Se^{v}.v^{n-1}.dv$. Dette er et Integral af den bekiendte Form, hvorom forhen §. 10 er handlet. Er det fremsatte Integral $Se^{(a+bx)^{\frac{n}{m}}}.dx$, saa kan man ligeledes tage $(a+bx)^{\frac{n}{m}} = v$, og da er $(a+bx)^{n} = v^{m}$, og $nb(a+bx)^{n-1}.dx = mv^{m-1}.dv$; og $dx = \frac{mv^{m-1}.dv}{nb(a+bx)^{n-1}} = \frac{m.v^{m-1}.dv}{nb.v^{\frac{m}{n}.(n-1)}} = \frac{m}{nb}.v^{\frac{m-n}{m}}.dv$; og $Se^{(a+bx)^{\frac{n}{m}}}dx = \frac{m}{nb}.Se^{v}.v^{\frac{m-n}{n}}.dv$; dette er et Integral af den forrige Form, og den faldende Rad for V vil bryde af, som i §. 11, naar $\frac{m}{n-1}$ er et heelt Tal.

Lad fremdeles Integralet være $Se^{(a+bx^{n})^{\frac{1}{r}}}.dx$. Man sætte $a+bx^{n} = v^{r}$, saa er $nbx^{n-1}.dx = rv^{r-1}.dv$, og $dx = \frac{rv^{r-1}.dv}{nbx^{n-1}}$. Men $x^{n} = (v^{r}-a):b$, og $x^{n-1} = \left(\frac{v^{r}-a}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}$. Altsaa $Se^{(a+bx^{n})^{\frac{1}{r}}}.dx$ =

$= Se^v \cdot \frac{r}{nb} \cdot \frac{v^{r-1}}{\left(\frac{v^r - a}{b}\right)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{r}{n} \cdot b^{-\frac{1}{n}} \cdot Se^v \cdot \frac{v^{r-1}}{(v^r - a)^{\frac{n-1}{n}}} \cdot dv.$ Dette sidste Integral hører til dem i §. 15, hvorved ingen videre Vanskelighed er, undtagen Møisommelighed i Regningen.

§. 18.

Naar i $Se^z dx$ hverken z eller $dz : dx = X$ er en algebraisk Function af x, saa kan endnu den samme Methode anvendes, og Formen for Raden V findes. Man antager $z = Sa\ Log.\ N \cdot dx$, hvor N er en algebraisk Function af x, saa bliver $X = a\ Log.\ N$, og $dX = a\frac{dN}{N}$.

Af Hovedæqvationen $1 - XV - dV : dx = 0$ findes $X = \frac{1 - dV : dx}{V}$, eller $X = V^{-1}(1 - dV : dx)$, og naar man paa nyt differentierer, er $dX = -V^{-2} \cdot (dV - (dV)^2 : dx) - V^{-1} \cdot ddV : dx$. Derved faaer man en anden Hovedæqvation $a\frac{dN}{N} + V^{-2}dV - V^{-2} \cdot (dV)^2 : dx + V^{-1} \cdot ddV : dx = 0$, eller $0 = aV^2 \cdot dN : dx + N\frac{dV}{dx}\left(1 - \frac{dV}{dx}\right) + \frac{NddV}{dx^2}$.

§. 19.

Ved Brugen af denne anden Hovedæqvation maae man imidlertid bemærke, at i de Tilfælde, hvor X foruden de foranderlige Leed, desuden indeholder en bestandig Størrelse, maae Æqvationen igien integreres, førend de antagne Coefficienter i Raden V bestemmes, og Integralet, ved Tillæg af en Constant udfyldes.

Det er klart, at naar $X = P + K$, hvor P er en Function af x; men K er uforanderlig; da er efter den første Hovedæqvation $P + K = V^{-1}\left(1 - \frac{dV}{dx}\right)$. Naar man paa nyt differentierer, saa fremkommer paa nyt en Differential-Æqvation $aV^2 \cdot dN = -NdV\left(1 - \frac{dV}{dx}\right) - NV \cdot \frac{ddV}{dx}$, det

er

er en saadan, hvilken vil fyldestgiøre Æqvationen $P = V^{-1}\left(1 - \frac{dV}{dx}\right)$; men ikke passer sig til den første Hovedæqvation, førend den først er udfyldt. Men naar, efterat Integrationen er foretagen, den constante Størrelse er føiet til, saa har man den Æqvation, af hvilken Coefficienterne for V lade sig bestemme; da og igien Udfyldningen til Integralet paa den sædvanlige Maade maae søges, naar V er fundet og $Se^z\,dx = e^z V$, saaledes, som i §. 9 er erindret, med mindre $e^z V$ forsvinder med $x = 0$.

§. 20.

Lad det søgte Integral være $Se^{s.\,Log.\,(1+x)\,.\,dx}\,.\,dx$, saa er $X = Log.\,(1+x)$ og $dX = \frac{dx}{1+x}$. Altsaa $dN = dx$, $N = 1+x$, og $a = 1$. Man kan altsaa gaae frem paa følgende Maade:

Man sætte $V = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + +$

$$
\begin{aligned}
\text{saa er } V^2 = {} & A^2 + 2ABx + B^2x^2 + 2BCx^3 + 2AEx^4 + + \\
& + 2ACx^2 + 2ADx^3 + C^2x^4 + + \\
& + 2BDx^4 + +
\end{aligned}
$$

fremdeles $dV : dx = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + +$

$$1 - \frac{dV}{dx} = 1 - B - 2Cx - 3Dx^2 - 4Ex^3 - -$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dx}\left(1 - \frac{dV}{dx}\right) = {} & B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \\
& - B^2 - 2BCx - 3BDx^2 - 4BEx^3 \\
& - 2BCx - 4C^2x^2 - 6CDx^3 \\
& - 3BDx^2 - 6CDx^3 \\
& - 4BEx^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
VddV : dx^2 = {} & 2AC + 2BCx + 2CCx^2 + 2CDx^3 \\
& + 6ADx + 6BDx^2 + 6CDx^3 \\
& + 12AEx^2 + 12BEx^3 \\
& + 4.5AFx^3
\end{aligned}
$$

Naar nu $V^2 + (1+x)\frac{dV}{dx}\left(1 - \frac{dV}{dx}\right) + (1+x)\frac{VddV}{dx^2} = 0$

saa faaer man

$$
\begin{array}{rrrrrr}
0 = A^2 & + 2ABx & + B^2x^2 & + 2BCx^3 & + & + \\
 & & & & + 2AC & + 2AD \\
 & & + B & + 2C. & + 3D. & + 4E \\
 & & - B^2 & - 2BC & - 3BD & - 4BE \\
 & & & - 2BC & - 4CC & - 6CD \\
 & & & & - 3BD & - 6CD \\
 & & & & & - BE \\
 & & + 2AC & + 2BC & + 2CC & + 2CD \\
 & & & + 6AD & + 6BD & + 6CD \\
 & & & & + 12AE & + 12BE \\
 & & & & & + 4.5AF
\end{array}
$$

$$
+ (B - B^2 + 2AC)\, x
$$
$$
+ (2C - 2BC + 6AD)\, x^2 + (3D - 2CC + 12AE)\, x^3
$$

Heraf faaer man de til Coefficienternes Bestemmelse fornødne Æqvationer, nemlig $A^2 + B - B^2 + 2AC = 0$. Her maae man tage 2 Størrelser vilkaarlig, dog saaledes, at den tredie tillige derved bliver bestemt. Er $A = 0$, saa bliver B enten $= 1$ eller $= 0$; men C bliver ikke bestemt. Dersom $A = 1$, og $B = 1$, saa bliver $C = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2.3}$, $E = \frac{2}{2.3.4}$; $F = -\frac{7}{2.3.4.5}$.

§. 21.

Men i nærværende Tilfælde, hvor $x = \text{Log.}\,(1 + x)$, og hvor man for $\text{Log.}\,(1 + x)$ kan sætte den bekiendte voxende Rad, $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + -$, vil man nærmere og lettere erholde Raden for V efter den første Hovedæqvation $1 - XV - dV : dx = 0$, naar for X den forrige Rad substitueres. Derved bliver da Raden for V en stigende Rad §. 16, og altsaa ubrugelig, naar x er større end 1. Man maatte derfor forud søge en anden faldende Rad for $\text{Log.}\,(1 + x)$ førend man ligeledes for V kan erholde en faldende Rad.

Imid.

Imidlertid vil man i nærværende Exempel, hvor nemlig $dX = \frac{dx}{1 + x}$, ikke erholde nogen faldende Rad for V, omendskiønt man strax anvender den anden Hovedæqvation paa samme Maade, som i §. 20. Anderledes vilde det være, naar $dX = \frac{dx}{1 + x^2}$.

§. 22.

Naar z i det givne Integral $Se^z dx$ er en exponential Størrelse. F. E. $z = a^x$, saa indeholder Differentialet $dz = Xdx$ selv z eller a^x. Naar man har Hensigt til denne Omstændighed, kan man finde Raden for V paa ovenstaaende Maade efter den første Hovedæqvation $1 - XV - dV : dx = 0$.

Man tager nemlig, $V = X^{-1} + AX^{-2} + BX^{-3} + +$, saa er $dV = - X^{-2} . dX - 2AX^{-3} dX - 3B . X^{-4} . dX - -$. Men naar $z = a^x$, saa er $dz = a^x . \text{Log. } a . dx$, og $dX = a^x . (\text{Log. } a)^2 dx = \text{Log. } a . X . dx$. Følgelig $\frac{dV}{dx} = - \text{Log. } a . X^{-1} - 2A . \text{Log. } a . X^{-2} - 3B \text{ Log. } a . X^{-3} - -$; $XV = 1 + AX^{-1} + BX^{-2} + CX^{-3} + +$ altsaa $0 = 1 - 1 - (A - \text{Log. } a) X^{-1} - (B - 2A \text{ Log. } a) X^{-2} - (C - 3B \text{ Log. } a) X^{-3}$. o. s. f. Derfor bliver $A = \text{Log. } a$, $B = 2A \text{ Log. } a$, $C = 3B \text{ Log. } a$. o. s. f.

§. 23.

Lad det forlangte Integral være $Se^{x^x} . dx$, eller $x^x = z$, altsaa $dz = (1 + \text{Log. } x) x^x . dx$, og $X = (1 + \text{Log. } x) x^x$. Man tage $V = X^{-1} + MX^{-2} + NX^{-3} + PX^{-4}$ o. s. f. hvor Coefficienterne M, N, P o. s. f. ere foranderlige Størrelser, og Functioner af x. Derfor er ogsaa

$$XV = 1 + MX^{-1} + NX^{-2} + PX^{-3} + +$$

$$\frac{dV}{dx} = - X^{-2} . \frac{dX}{dx} - 2MX^{-3} . \frac{dX}{dx} - 3NX^{-4} . \frac{dX}{dx} - -$$

$$+ X^{-2} . \frac{dM}{dx} + X^{-3} . \frac{dN}{dx} + +$$

 Er

Er $dX = R \cdot X \cdot dx$, hvor R er en Function af x, saa bliver

$$\frac{dV}{dx} = -RX^{-1} - 2MRX^{-2} - 3NRX^{-3} - -$$
$$+ \frac{dM}{dx} \cdot X^{-2} + \frac{dN}{dx} \cdot X^{-3} + +$$

Deraf faaer man

$$0 = 1 - 1 - MX^{-1} - NX^{-2} - PX^{-3} - -$$
$$+ RX^{-1} + 2RMX^{-2} + 3NR.X^{-3} + +$$
$$- \frac{dM}{dx} X^{-2} - \frac{dN}{dx} X^{-3} - -$$

og altsaa for Coefficienterne i Raden V.

$$M = R$$
$$N = 2MR - dM : dx$$
$$P = 3NR - dN : dx$$

hvor Loven for Fremgangen tydelig viser sig.

I det forelagte Integral er $dX = d \cdot (1 + \text{Log.}\, x)\, x^x = ((1 + \text{Log.}\, x)^2 + x^{-1})\, x^x dx = (1 + \text{Log.}\, x)\, Xdx + X (1 + \text{Log.}\, x)^{-1} \cdot x^{-1} \cdot dx$. Altsaa $R = 1 + \text{Log.}\, x + \frac{1}{(1 + \text{Log.}\, x)\, x}$ Skriver man v for $1 + \text{Log.}\, x$, saa er $M = R = v + \frac{1}{vx}$; $\frac{dR}{dx} = \left(dv - \frac{xdv - vdx}{x^2 v^2}\right) : dx = \frac{1}{x} - \frac{1 + v}{x^2 v^2}$. Følgelig $V = X^{-1} + MX^{-2} + NX^{-3} + + = \frac{1}{v} x^{-x} + \left(v + \frac{1}{vx}\right) \frac{1}{v^2} \cdot x^{-2x} + 2 \cdot \left(v + \frac{1}{vx}\right)^2 \cdot \frac{1}{v^3} \cdot x^{-3x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1 + v}{v^2 x^2}\right) \frac{1}{v^3} \cdot x^{-3x}$

$$= \frac{1}{v} \cdot x^{-x} + \frac{1}{v} x^{-2x} + \frac{2}{v} \cdot x^{-3x}$$
$$+ \frac{1}{xv^3} x^{-2x} + \frac{3}{xv^3} \cdot x^{-3x}$$
$$+ \frac{1}{x^2 v^4} \cdot x^{-3x}$$
$$+ \frac{3}{x^2 v^5} \cdot x^{-3x}$$

og altsaa $S e^{x^x} dx = e^{x^x} \cdot V$.

Astro-